שאלה 1 (מהש"ב) (25%)

א. (8%) הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית: אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ אז $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\infty$.

פתרון: $f(x)-x=x\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)\to\infty(\infty-1)=\infty$

ב. (17%) נתונה הסדרה המוגדרת האופן הבא: $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1}\quad ,a_1=2$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון: נראה כי מונוטונית יורדת באינדוקציה: $a_1=2>\sqrt{3}=a_2$.

נניח כי $a_{n+1}\le a_n$ ונראה כי $a_{n+2}\le a_{n+1}$:

$$a_{n+1}\le a_n\to 2a_{n+1}-1\le 2a_n-1\to a_{n+2}=\sqrt{2a_{n+1}-1}\le\sqrt{2a_n-1}=a_{n+1}$$

נראה כי חסומה מלמטה ע"י 1: $a_1=2\ge 1$

נניח כי $1\le a_n$ ונראה כי $1\le a_{n+1}$: $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1}\ge\sqrt{2\cdot 1-1=1}$.

הסדרה חסומה מלמטה ומונוטונית יורדת ולכן מתכנסת למספר (סופי) L.

$$\sqrt{2L-1}\leftarrow\sqrt{2a_n-1}=a_{n+1}\to L$$

ולכן מיחידות הגבול נובע כי $\sqrt{2L-1}=L$ ולכן $L^2=2L-1$ ולכן $L=1$.

שאלה 2 (25%)

א. (13%) הוכיחו כי למשוואה $x^2-1=\sin(x)$ יש לפחות שני פתרונות בקטע $(-1,2)$.

פתרון: המשוואה שקולה למשוואה $x^2-1-\sin(x)=0$. נגדיר $f(x)=x^2-1-\sin(x)$. אזי הפונקציה רציפה כי היא סכום והפרש של פונקציות אלמנטריות המוגדרות ולכן גם רציפות על כל הישר.

$$f(-1)=1-1-\sin(-1)=-\sin(-1)=\sin(1)>0$$

כאשר $\sin(1)>0$ מכיוון ש-$0<1<\pi$. בנוסף $f(0)=-1$ וגם $f(2)=4-1-\sin(2)>3-1=2>0$.

כיוון ש-$f(-1)>0>f(0)$ אז לפי משפט ערך הביניים נובע כי יש $-1<c<0$ עבורו $f(c)=0$.

כיוון ש-$f(2)>0>f(0)$ אז לפי משפט ערך הביניים נובע כי יש $0<d<2$ עבורו $f(d)=0$.

כיוון ש- $c<0<d$ אז $c\ne d$ ומצאנו שני פתרונות.

ב. (12%) הוכיחו כי לפונקציה המחזורית $f(x)=\frac{\sin(x)}{2+\cos(11x)}$ יש מקסימום על הישר הממשי.

פתרון: הפונקציה היא מחזורית. למשל עם מחזור 2π.

$$f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(11x+11\cdot 2\pi))}=\frac{\sin(x)}{2+\cos(11x)}=f(x)$$

הפונקציה רציפה על הישר כי היא מנה של אלמנטריות הרציפות על כל הישר כאשר המכנה לא מתאפס כיוון ש- $2+\cos(11x)\ge 2-1=1$. לכן לפי משפט וויארשטראס, על הקטע $[0,2\pi]$ הפונקציה מקבלת מקסימום. נניח שמתקבל מקסימום בנקודה x_0. אזי $f(x_0)\ge f(x)$ לכל $0\le x\le 2\pi$.

אם x מספר כלשהו, אזי יש k שלם עבורו $0\le x+2\pi k\le 2\pi$. אזי

$$f(x)=f(x+2\pi k)\le f(x_0)$$

ולכן x_0 נקודת מקסימום על הישר.

שאלה 3 (25%) (תזכורת: אין להשתמש בלופיטל) יש לנמק את החישובים.

א. (9%) חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$ עבור $n \neq 0$.

פתרון: עבור $m \neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\mathrm{mx}}\frac{mx}{nx}\frac{nx}{\sin(nx)} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{n}\frac{\sin(mx)}{\mathrm{mx}}\frac{nx}{\sin(nx)} = \frac{m}{n}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהגבול המפורסם $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ ולכן

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{mx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{nx} = 1$.

עבור $m = 0$ נקבל כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(0x)}{\sin(nx)} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{\sin(nx)} = 0$$

ב. (8%) חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)}$ (רמז: הגדרת הנגזרת).

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\frac{x}{\sin(x)} = 1$$

כאשר השוויון האחרון נובע מזה ש-

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0} = (e^x)'_{x=0} = e^0 = 1$$

ו-$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

ג. (8%) חשבו $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$.

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right)^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}$$

אנו יודעים כי $\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}} = e$ וגם

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

ולכן הגבול הוא $e^{-\frac{1}{2}}$.

שאלה 4 (25%)
תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת על $[0,\infty)$.

א. 1. (5%) הגדירו: הגבול של f כאשר x שואף לאינסוף שווה לאפס.

פתרון: לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שכאשר $x > N$ אז $|f(x) - 0| < \epsilon$.

2. (13%) הוכיחו: אם f רציפה בקטע $[0,\infty)$ וגם $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ אז לפונקציה $|f|$ יש מקסימום בקרן $[0,\infty)$.

פתרון: מקרה 1: אם $f(x) = 0$ לכל $x \geq 0$ אזי כל נקודה היא מקסימום. בפרט, יש מקסימום.
מקרה 2: קיים $x_0 \geq 0$ עבורו $f(x_0) \neq 0$. במקרה זה $|f(x_0)| > 0$. בנוסף $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. לבסוף $|f(x)|$ פונקציה רציפה כי היא הרכבה של רציפה עם ערך מוחלט.
נגדיר $\epsilon_0 = |f(x_0)|$. אזי $\epsilon_0 > 0$ ואזי לפי הגדרת הגבול של $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$ נובע כי עבור ϵ_0 קיים $N_0 > 0$ כך שכאשר $x > N_0$ אז $|f(x)| < \epsilon_0 = |f(x_0)|$. בפרט, $x_0 \leq N_0$.
על הקטע $[0, N_0]$ יש לפונקציה $|f(x)|$ מקסימום כיוון שהיא רציפה שם. נסמן את נקודת המקסימום ע"י x_{max}. אזי $|f(x_{max})| \geq |f(x)|$ לכל $0 \leq x \leq N_0$. בפרט $|f(x_{max})| \geq |f(x_0)|$.
לכל $x > N_0$ מתקיים $|f(x)| < \epsilon_0 = |f(x_0)| \leq f(x_{max})|$ ולכן זוהי נקודת מקסימום על $[0,\infty)$.

ב. (7%) הוכיחו כי אם $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ אז $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

פתרון:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} x = 0 \cdot 0 = 0$$